AUTOMORFISMA GRAF WARNA CAYLEY YANG DIBANGUN OLEH SUATU GRUPOID

Bety Dian Kristina Ningrum[1] dan Bambang Irawanto[2]
[1.2]Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl.Prof.Soedarto, S.H Semarang 50275

Abstract.Groupoid $\mathcal{G}$ adalah suatu himpunan tak kosong yang tertutup terhadap operasi biner, himpunan generator Δ grupoid merupakan subset dari grupoid dimana setiap elemen grupoid dapat ditulis sebagai hasilkali berhingga pada elemen generator.Graph warna Cayley $(C_\Delta(\mathcal{G}))$ digraph dengan titik-titiknya adalah $\mathcal{G}$ dan himpunan busurnya $A(C_\Delta(\mathcal{G})) = \{(x,z)|x \in \mathcal{G}, z \in \Delta, (x,z) \in \mathcal{G}^{(2)}\}$. Generator grupoid befungsi sebagai warna dan arah busur digraph.Pemetaan α adalah pemetaan bijektif antara graph $C_\Delta(\mathcal{G})$ dengan dirinya sendiri.. Automorphism parsial pada graph warna Cayley $(C_\Delta(\mathcal{G}))$ adalah pemetaan bijektif antara dua tail graph warna Cayley $(C_\Delta(\mathcal{G}))$. Himpunan Automorphisma Parsial graph warna Cayley $(C_\Delta(\mathcal{G}))$ adalah $PAut(C_\Delta(\mathcal{G}))$.

Keywords : colour cayley graph, generator, grupoid, partial automorphism.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bidang bahasan Matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan garis. Dalam perkembangan teori graf tidak lepas dari perkembangan bidang bahasan matematika yang lain, salah satunya adalah aljabar khususnya teori grupoid. Seorang ahli matematikawan yaitu Arthur Cayley mengkontruksikan suatu teori pewarnaan yang diperkenalkan pada graf yang dibentuk dari suatu grup yang dikenal sebagai grup warna (*Gruppenbild* atau lebih dikenal dengan graf warna Cayley).

Pada pembahasan ini dikontuksikan suatu graf dengan himpunan busur dan himpunan titik merupakan elemen dari grupoid. Dengan adanya generator sebagai pembangkit pada grupoid, himpunan busur pada graf warna cayley dapat dibentuk dengan warna sesuai generator.

2. PEMBAHASAN

2.1 Grupoid Transitif

Diberikan himpunan tak kosong $\mathcal{A}$ dan grup G dengan operasi biner $*$ akan dibentuk suatu grupoid transitif dengan menggunakan definisi dibawah ini

Definisi 2.1 [8] *Diketahui suatu himpunan $\mathcal{A}$ dengan $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ membentuk suatu grupoid. Grupoid transitif $\mathcal{G}$ adalah hasil perkalian antara grup $(G,*)$ dengan grupoid $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$*

$$\mathcal{G} = \{(a,g,b)|a,b \in \mathcal{A}, dan\ g \in G\}.$$

Contoh 2.2 Diberikan $\mathrm{X} = \{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ dan grup $\mathrm{G} = (\mathrm{Z}_2,+)$.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 1. Grup G

Misalkan $\mathcal{C} = X * X$. akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{C} = \{(x,y)|x,y \in X\}$ merupakan grupoid dengan diberikan suatu operasi biner " $*$ " yang didefinisikan $(a,b) * (c,d) = (x,y)$ dimana :

Jika $a = c$ maka $x = c$
Jika $a \neq c$ maka $x = a$
Jika $b = d$ maka $y = b$
Jika $b \neq d$ maka $y = d$

Tabel 2. Grupoid $\mathcal{C}$

$*$	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
(a,a)	(a,a)	(a,b)	(a,a)	(a,b)
(a,b)	(a,a)	(a,b)	(a,a)	(a,b)
(b,a)	(b,a)	(b,b)	(b,a)	(b,b)
(b,b)	(b,a)	(b,b)	(b,a)	(b,b)

Grupoid transitif $\mathcal{G}$ dari perkalian antara grupoid $\mathcal{C}$ dengan G adalah

$\mathcal{G} = \mathcal{C} \times \mathrm{G}$

$= \{(a, g, b) | a, b \in X, \text{dan } g \in G\}$

$= \left\{\begin{matrix}(a,0,a),(a,1,a),(a,0,b),(a,1,b),(b,0,a), \\ (b,1,a),(b,0,b),(b,1,b)\end{matrix}\right\}$

Misalkan $(a, g, b), (c, h, d) \in \mathcal{G}$ maka $(a, g, b) \times (c, h, d) = (x, j, y)$ dimana

Jika $a = c$ maka $x = c$
Jika $a \neq c$ maka $x = a$
Jika $b = d$ maka $y = b$
Jika $b \neq d$ maka $y = d$
dan $j = g + h, j, g, h \in \mathrm{G}$
sehingga dapat ditunjukkan bahwa grupoid transitif $\mathcal{G}$

Tabel 3 Grupoid transitif $\mathcal{G}$

$\times$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$
$(a,0,a)$	$(a,,0,a)$	$(a,0,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$
$(a,0,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$
$(b,0,a)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$
$(b,0,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$
$(a,1,a)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$
$(a,1,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(a,1,a)$	$(a,1,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$	$(a,0,a)$	$(a,0,b)$
$(b,1,a)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$
$(b,1,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$	$(b,1,a)$	$(b,1,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$	$(b,0,a)$	$(b,0,b)$

Misalkan $(a, g, b) \in \mathcal{G}$, invers dari (a, g, b) adalah (b, g^{-1}, a) dengan $a, b \in X$ dan $g, g^{-1} \in \mathrm{G}$

Definisi 2.3 [8] *Diketahui $\mathcal{G}$ merupakan suatu grupoid, diberikan suatu himpunan Δ, dimana $\Delta \subset \mathcal{G}$. Himpunan Δ dikatakan sebagai generator $\mathcal{G}$ jika Δ dapat membangkitkan setiap elemen pada $\mathcal{G}$.*

Contoh 2.4 Misalkan grupoid transitif $\mathcal{G}$ (contoh definisi 1)

$\mathcal{G} = \{(a,0,a),(a,1,a),(a,0,b),(a,1,b),$
$(b,0,a),(b,1,a),(b,0,b),(b,1,b)\}$

dengan operasi biner $" \times "$, diambil suatu himpunan Δ dengan $\Delta \subseteq \mathcal{G}$ yaitu

$\Delta = \{(b,0,a),(a,0,b),(a,1,a)\}$

Akan ditunjukkan bahwa Δ dapat membangkitkan $\mathcal{G}$

$(a,0,b) \times (b,0,a) = (a,0,a)$
$(b,0,a) \times (a,0,b) = (b,0,b)$
$(a,1,a) \times (a,0,b) = (a,1,b)$
$(b,0,a) \times (a,1,a) = (b,1,a)$
$(b,0,a) \times (a,1,a) \times (a,0,b) = (b,1,b)$
$(b,0,a) \times \big((a,0,b) \times (b,0,a)\big) = (b,0,a)$
$(a,1,a) \times (a,0,b) \times (b,0,a) = (a,1,a)$
$(a,1,a) \times (a,1,a) \times (a,0,b) = (a,0,b)$

Dengan demikian Δ membangkitkan $\mathcal{G}$ atau Δ merupakan generator dari $\mathcal{G}$.

2.2 Graf warna Cayley

Definisi 2.5 [1] *Misalkan diberikan grup $(G,*)$, suatu graf (G,E) disebut dengan grup graf apabila himpunan titik nya adalah G dan terdapat himpunan $A \subset G$ sedemikian sehingga himpunan garis dari graf tersebut untuk $a \in A$,*

$E(G,E) = \{(x, a * x) | \forall x \in G\}.$

Contoh 2.6 Misalkan diberikan grup $Z_3 = \{0,1,2\}$ dengan operasi biner $" + "$ yang didefinisikan sebagai berikut :

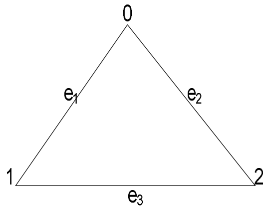
Tabel 4 Grup Z_3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Diambil $A = \{1\}$ dimana $A \subset Z_3$ sehingga dapat bentuk suatu graf (Z_3, E) dengan himpunan titik $V(Z_3, E) = \{0,1,2\}$ dan himpunan garis

$$E(Z_3, E) = \{(x, x+1) | \forall x \in Z_3\}$$

Dengan demikian $E = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$ dan grup graf (Z_3, E) adalah :



Gambar 1. Grup Graf (Z_3, E)

Definisi 2.7 [8] *Diketahui suatu grupoid* $\mathcal{G}$ *dan* Δ *merupakan himpunan generator pada* $\mathcal{G}$. *Dan himpunan* $\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{G} \times \Delta = \{(x, z) | x \in \mathcal{G}, z \in \Delta\}$.*Graf warna Cayley* $(C_\Delta(\mathcal{G}))$ *pada* $\mathcal{G}$ *yaitu digraf dengan himpunan titik* $V(C_\Delta(\mathcal{G})) \in \mathcal{G}$ *dan himpunan busur* $E(C_\Delta(\mathcal{G})) = \{(x, z, xz) | x \in \mathcal{G}, z \in \Delta, (x, z) \in \mathcal{G}^{(2)}\}$ *dengan himpunan warna* $z \in \Delta$, *sedemikian sehingga busur e =* (x, z, xz) *menghubungkan titik* x *ke titik* $xz \in V(C_\Delta(\mathcal{G}))$ *dengan pemberian warna* z *pada busur yang menghubungkan kedua titik tersebut.*

Untuk selanjutnya Graf warna cayley $(C_\Delta(\mathcal{G}))$ dinotasikan sebagai graf $C_\Delta(\mathcal{G})$.

Contoh 2.8 Diketahui grupoid transitif $\mathcal{G}$ dari definisi 1 dengan dimisalkan $u = (a, 0, a), s = (a, 1, a), x^{-1} = (a, 0, b), x = (b, 0, a), y^{-1} = (a, 1, b)$

$$y = (b, 1, a), v = (b, 0, b), t = (b, 1, b)$$

dan $\Delta = \{(b, 0, a), (a, 0, b), (a, 1, a)\}$ diperoleh graf cayley dengan $V(C_\Delta(\mathcal{G})) = \{x, y, v, t, s, u, x^{-1}, y^{-1}\}$

$E(C_\Delta(\mathcal{G})) = \{(x, z, xz) | x \in \mathcal{G}, z \in \Delta\}$ misalkan

a) Untuk $v_1 = x$, dengan generator x

$e_1 = (x, x, xx)$
$= ((b, 0, a), (b, 0, a), (b, 0, a) \times (b, 0, a))$
$= ((b, 0, a), (b, 0, a), (b, 0, a))$
$= (x, x, x)$

Busur (x, x) membentuk lup dari titik x ke titik x dengan warna x

b) Untuk $v_1 = x$, dengan generator x^{-1}

$e_2 = (x, x^{-1}, xx^{-1})$
$= ((b, 0, a), (a, 0, b), (b, 0, a) \times (a, 0, b))$
$= ((b, 0, a), (a, 0, b), (b, 0, b))$
$= (x, x^{-1}, v)$

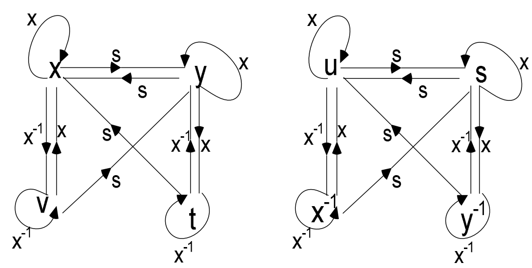
Busur (x, v) menghubungkan titik x ke titik v dengan warna x^{-1}

c) Untuk $v_1 = x$, dengan generator s

$e_3 = (x, s, xs)$
$= ((b, 0, a), (a, 1, a), (b, 0, a) \times (a, 1, a))$
$= ((b, 0, a), (a, 1, a), (b, 1, a)) = (x, s, y)$

Busur (x, y) menghubungkan titik x ke titik y dengan warna s

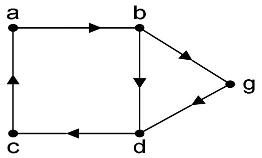
Dengan cara mensubtitusi semua elemen anggota $\mathcal{G}$ diperoleh graf $C_\Delta(\mathcal{G})$:



Gambar 2. Graf warna Cayley $(C_\Delta(\mathcal{G}))$ dari grupoid transitif

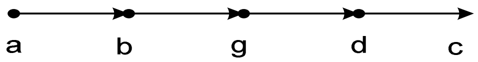
Definisi 2.9 [8] *Misalkan diberikan digraf* A *dengan himpunan titik* $V(A)$ *dan himpunan busur* $E(A)$. *Jika diambil* $v \in V(A)$, *tail* (v) *adalah himpunan titik digraf* A *yang dihubungkan oleh suatu walk berhingga yang dimulai dari titik* v.

Contoh 2.10 Misalkan diberikan digraf A dengan himpunan titik $V(A) = \{a, b, c, d, g\}$ dan himpunan busur $E(A) = \{(a, b), (b, g), (g, d), (d, c), (c, a)\}$ sebagai berikut :



Gambar 3. Digraf A

Salah satu walk yang dimulai dari titik a pada digraf A adalah



Gambar 4. Tail (a)

Sehingga tail (a) $=\{(a,b),(b,g),(g,d),(d,c)\}$.

Lemma 2.11 [8] *Jika x adalah suatu titik pada $C_\Delta(\mathcal{G})$ maka $tail(x) = \{xy \mid y \in \mathcal{G}\}$.*

Bukti :

Diketahui $x \in V(C_\Delta(\mathcal{G}))$, jika $t \in$ tail(x) maka t dapat dicapai dari x dengan walk berarah (definisi 5). Akan dibuktikan bahwa $tail(x) = \{xy \mid y \in \mathcal{G}\}$

Misalkan diberikan titik y dengan $y = z_1, \ldots, z_n \in \Delta$ dimana Δ merupakan himpunan generator pada $\mathcal{G}$ dan warna pada busur serta arah yang menunjukkan titik t terhubung dengan ke titik tz_i dengan $i = 1,..,n$ maka

$t = x(z_1, \ldots, z_n) = xz_1, \ldots \ldots, xz_n \in$ tail(x)

Dengan demikian $t \in$ tail(x) dan $z_1, \ldots, z_n \in \Delta$ membentuk suatu walk dengan adanya busur yang dimulai dari xz_1 ke xz_2 sampai xz_n. Himpunan Δ merupakan himpunan generator pada $\mathcal{G}$ maka $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{G}$ sehingga $tail(x) = \{xy \mid y \in \mathcal{G}\}$ dan $tail(x) \in C_\Delta(\mathcal{G})$. ■

Definisi 2.12 [8] *Misalkan x adalah suatu titik pada graf $C_\Delta(\mathcal{G})$ yang membentuk suatu tail (x). Suatu himpunan $r(x) = \{xy \mid y = z_1, \ldots, z_n, y \in \mathcal{G}\}$ disebut sebagai unit tunggal dari $\mathcal{G}$ jika tail x membentuk suatu walk berarah dengan busur yang telah terbentuk dari generator sedemikian sehingga setiap elemen dalam tail x dapat menjadi kepala tail dengan walk yang mempunyai himpunan titik sama dengan tail x.*

Contoh 2.13 Misalkan diberikan suatu titik $x^{-1} \in V(C_\Delta(\mathcal{G}))$ (contoh 3.) yang membentuk suatu walk (tanpa disertai warna busur) yaitu :

$(x^{-1}, u), (u, s), (s, y^{-1}), (y^{-1}, s), (s, u), (u, x^{-1})$

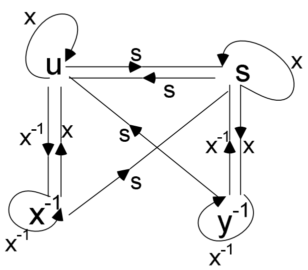
sehingga dapat dikatakan x^{-1} merupakan tail .

Jika kita ambil suatu titik dari rangkaian walk tersebut misalkan $u \in$ tail x^{-1} maka titik u juga dapat menjadi tail dengan rangkaian walk :

$(u, s), (s, y^{-1}), (y^{-1}, s), (s, x^{-1}), (x^{-1}, u)$

Dengan demikian untuk setiap elemen tail x^{-1} dapat menjadi tail dengan walk yang sama. Dari gambar 2 diperoleh dua unit tail yaitu :

1. Tail $r(x^{-1})$ dengan himpunan titik = $\{x^{-1}, u, s, y^{-1}\}$

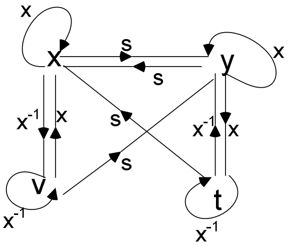


Gambar 5 Tail $r(x^{-1})$

Yang dapat dibentuk 4 tail :

a. Tail (x^{-1}) dengan walk (disertai warna busur) : $(x^{-1}, x, u), (u, s, s), (s, x, y^{-1})$
b. Tail (u) dengan walk (disertai warna busur): $(u, x^{-1}, x^{-1}), (x^{-1}, s, s), (s, x, y^{-1})$
c. Tail (s) dengan walk (disertai warna busur) : $(s, x, y^{-1}), (y^{-1}, s, u), (u, x^{-1}, x^{-1})$
d. Tail (y^{-1}) dengan walk (disertai warna busur) : $(y^{-1}, x^{-1}, s), (s, s, u), (u, x^{-1}, x^{-1})$

2. Tail $r(v)$ dengan titik (v, x, y, t)



Gambar 6. Tail $r(v)$

yang juga dapat dibentuk 4 tail :

e. Tail (v) dengan walk (disertai warna busur) : $(v, x, x), (x, s, y), (y, x, t)$
f. Tail (x) dengan walk (disertai warna busur) : $(x, x^{-1}, v), (v, s, y), (y, x, t)$
g. Tail (y) dengan walk (disertai warna busur) : $(y, x, t), (t, s, x), (x, x^{-1}, v)$
h. Tail (t) dengan walk (disertai warna busur) : $(t, x^{-1}, y), (y, s, x), (x, x^{-1}, v)$

Lemma 2.14 [8] *Jika x adalah suatu titik pada $C_\Delta(\mathcal{G})$ maka $r(x)$ adalah unit tunggal dari $\mathcal{G}$ di mana tail (x) = tail ($r(x)$).*

2.3 Automorfisma parsial graf warna Cayley

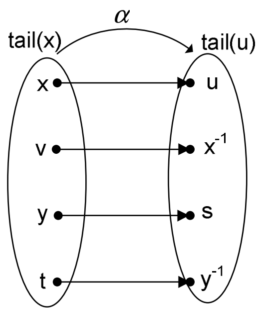
Definisi 2.15 [8] *Suatu Automorfisma parsial pada graf warna Cayley $C_\Delta(\mathcal{G})$ adalah suatu pemetaan bijektif antara dua tail pada graf $C_\Delta(\mathcal{G})$ dimana $\alpha(xz) = \alpha(x)z$ untuk setiap $z \in \Delta$ dan $(x, z) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Himpunan automorfisma parsial pada graf warna Cayley $C_\Delta(\mathcal{G})$ dinotasikan sebagai $PAut\left(C_\Delta(\mathcal{G})\right)$.*

Jika $x \in V\left(C_\Delta(\mathcal{G})\right)$ maka $tail(x) = \{xy | y \in \mathcal{G}\}$ (lemma 1), Definisi pemetaan α dari graf $C_\Delta(\mathcal{G})$ merupakan pemetaan bijektif antara graf $C_\Delta(\mathcal{G})$ dengan dirinya sendiri yang diwakili oleh tiap komponen di masing-masing unit tail, sedemikian sehingga untuk setiap $x \in tail(v), z \in \Delta$, berlaku $\alpha(xz) = \alpha(x)z$ dimana $\alpha(x), \alpha(x)z \in tail(x^{-1})$.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & xz \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\
\alpha(x) \arrow[r, "z"'] & \alpha(x)z
\end{tikzcd}
$$

Gambar 7 Pemetaan antara dua tail

Untuk selengkapnya pemetaan automorfisma parsial $\alpha : tail(x) \to tail(u)$ diberikan pada gambar dibawah ini



Gambar 8 Automorfisma parsial graf $C_\Delta(\mathcal{G})$

Pemetaan diatas menunjukkan bahwa :
$\alpha: tail(x) \to tail(u)$
Untuk $v \in tail(x)$ dengan $v = x \times x^{-1}$ maka $\alpha(xx^{-1}) = \alpha(u)x^{-1} = x^{-1}$, dimana $x^{-1} \in tail(u)$
Untuk $y \in tail(x)$ dengan $y = x(x^{-1}s)$ maka $\alpha(x(x^{-1}s)) = \alpha(u)(x^{-1}s) = s$ dimana $s \in tail(u)$
Untuk $t \in tail(x)$ dengan $t = x(x^{-1}sx)$ maka $\alpha(x(x^{-1}sx)) = \alpha(u)(x^{-1}sx) = y^{-1}$ dimana $y^{-1} \in tail(u)$ dengan demikian pemetaan $\alpha: tail(x) \to tail(u)$ mempertahankan warna tiap busur.

Dari contoh pemetaan $\alpha: tail(x) \to tail(u)$ maka dapat ditunjukkan automorfisma parsial dari graf $C_\Delta(\mathcal{G})$ dari tiap-tiap tail pada definisi 6 adalah

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} x & v & y & t \\ u & x^{-1} & s & y^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} x^{-1} & u & s & y^{-1} \\ v & x & y & t \end{pmatrix}$$
$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} s & y^{-1} & u & x^{-1} \\ y & t & x & v \end{pmatrix}$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} t & y & x & v \\ y^{-1} & s & u & x^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\alpha_5 = \begin{pmatrix} u & x^{-1} & s & y^{-1} \\ u & x^{-1} & s & y^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\alpha_6 = \begin{pmatrix} s & y^{-1} & u & x^{-1} \\ s & y^{-1} & u & x^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\alpha_7 = \begin{pmatrix} x & v & y & t \\ x & v & y & t \end{pmatrix}$$
$$\alpha_8 = \begin{pmatrix} t & y & x & v \\ y^{-1} & s & u & x^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\alpha_9 = \begin{pmatrix} y^{-1} & s & u & x^{-1} \\ y^{-1} & s & u & x^{-1} \end{pmatrix}$$

$\alpha_{10} = \begin{pmatrix} t & y & x & v \\ t & y & x & v \end{pmatrix}$
$\alpha_{11} = \begin{pmatrix} v & x & y & t \\ v & x & y & t \end{pmatrix}$
$\alpha_{12} = \begin{pmatrix} y & t & x & v \\ y & t & x & v \end{pmatrix}$
$\alpha_{13} = \begin{pmatrix} x^{-1} & u & s & y^{-1} \\ x^{-1} & u & s & y^{-1} \end{pmatrix}$
$PAut\left(C_{\Delta}(\mathcal{G})\right) =$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}\}$

Tiap automorfisma parsial dari graf $C_{\Delta}(\mathcal{G})$ mempertahankan warna busur

Misalkan diambil $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x & v & y & t \\ u & x^{-1} & s & y^{-1} \end{pmatrix}$
yang memetakan tail (x) dengan walk (disertai warna garis)
:$(x, x^{-1}, v), (v, s, y), (y, x, t)$, dengan tail (u) dengan walk (disertai warna garis)
: $(u, x^{-1}, x^{-1}), (x^{-1}, s, s), (s, x, y^{-1})$.

Misalkan diambil $\alpha_2 = \begin{pmatrix} x^{-1} & u & s & y^{-1} \\ v & x & y & t \end{pmatrix}$
yang memetakan tail (x^{-1}) dengan walk (disertai warna garis) :
$(x^{-1}, x, u), (u, s, s), (s, x, y^{-1})$, dengan tail (v) dengan walk (disertai warna garis)
: $(v, x, x), (x, s, y), (y, x, t)$.

3. KESIMPULAN

Suatu grupoid dapat membentuk graf wrna Cayley dengan diberikan suatu generator dari grupoid. Himpunan titik dari graf warna cayley adalah anggota himpunan grupoid, sedangkan himpunan busurnya dibentuk dari perkalian antara anggota generator dengan anggota grupoid. Pemetaan antara graf warna Cayley dengan dirinya sendiri merupakan suatu automorfisma parsial. Automorfisma parsial graf warna Cayley menjaga adjacent antar titik dengan mempertahankan warna busur.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Atikah., (1988), *Pengantar teori group graph (skripsi)*, Fakultas Teknik Undip. Semarang.

[2] Cheng Q., *et al.*, (2008), *Graph comparison : homo-home morphism mapping in Metabolic Pathways*, Department of Computer Science, Georgia State University, Atlanta

[3] Gilbert dan Jimmie, (1984), *Elements of Modern Algebra,* PWS Publishers.

[4] Harjito, Udjiani, T., *et al.*, (2006), *Aljabar 1*, Lab Matematika UNDIP, Semarang.

[5] I.N, Heirsten, (1975), *Topics in Algebra*, New York.

[6] Kandasamy, W.B., dan Vasantha. (2002), *Groupoids and Smarandache Groupoid*. India Institute of technology.

[7] Sieben, Nandor, (2000), *Cayley Color Graphs of Inverse Semigroup and Gropoid*, Nothern Arizona University.